

# MODELO PARA ALOCAÇÃO DE BANCOS DE CAPACITORES PARA REGULAÇÃO DE TENSÃO EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO

SÉRGIO HAFFNER

*Departamento de Engenharia Elétrica, UDESC-CCT  
Campus Universitário Prof. Avelino Marcante s/n – Bairro Bom Retiro – 89223-100 – Joinville-SC – Brasil  
E-mail: slhaffner@gmail.com*

LUÍS A. PEREIRA, LEONARDO V. GASPERIN, LUCIO S. BARRETO

*Grupo de Sistemas de Energia Elétrica (GSEE) – FENG – PUCRS  
Av. Ipiranga, 6681 – Prédio 30 – Sala 150 – 90.619-900 – Porto Alegre – RS – BRASIL  
E-mails: lpereira@pucrs.br, leonardo.gasperin@pucrs.br, luciobarreto@gmail.com*

**Abstract**— This paper presents an optimization model to be applied to the problem of optimal capacitor banks allocation in power distribution feeders. One of the main advantages of the proposed model is that it employs only linear constraints and objective function in comparison to traditional models which in general work with non-linear ones. In this way, the optimal solution can be found faster and with less computational effort using methods suited for linear problems. The problem described here aims to determine the best location and reallocation nodes along the network for fixed and switched capacitor banks. The objective function seeks to minimize node voltages outside a prescribed range (voltage violations) and also to minimize acquisition and maintenance costs of capacitor banks. The evaluation of voltage violations is performed for different network load levels being switched capacitor banks only used when they are really needed. The solution of the optimization problem provides the location and rating of the capacitor banks needed for keeping the voltage levels inside the prescribed range. In addition, the solution also indicates when the capacitor banks have to be switched on and how long they have to be on.

**Keywords**— Power distribution; power distribution planning; voltage regulation; mixed integer programming.

**Resumo**— Neste trabalho apresenta-se um modelo de otimização para o problema de alocação de bancos de capacitores em alimentadores de distribuição de energia elétrica. Uma das principais vantagens do modelo proposto é empregar função objetivo e restrições lineares, diferenciando-se das abordagens usuais nas quais são utilizadas equações não-lineares. Isto permite que a solução ótima possa ser obtida por intermédio de métodos desenvolvidos para problemas lineares. O problema de alocação representado consiste em determinar o local ótimo de instalação e realocação de bancos de capacitores fixos e chaveados com o objetivo de minimizar as violações nas tensões e os custos de aquisição, instalação e manutenção dos bancos de capacitores. A avaliação das violações nas tensões é realizada para diferentes níveis de carregamento e as unidades chaveadas são utilizadas apenas quando necessário. Juntamente com a localização e a capacidade das unidades, a solução do modelo de otimização indica quando as unidades chaveadas devem permanecer ligadas.

**Palavras-chave**— Distribuição de energia elétrica, planejamento da expansão, regulação de tensão, programação inteira mista.

## 1 Introdução

Impulsionado por uma pressão internacional, iniciada no final da década de 1980, nos últimos 10 anos o setor elétrico brasileiro vivenciou expressivas alterações de estrutura e regulamentação. Esta reestruturação tem sido marcada pela consolidação de algumas entidades, como o Operador Nacional do Sistema (ONS) e a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), e pela alteração de outras, como o Mercado Atacadista de Energia (MAE) que foi substituído pela Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE). Como resultado direto da atuação da agência reguladora do setor (ANEEL), índices de qualidade de atendimento cada vez mais severos estão sendo exigidos das concessionárias de distribuição.

Dentre os vários aspectos que são regulados e fiscalizados pela ANEEL está o nível e qualidade da tensão disponibilizada aos consumidores, regulamentados pela Resolução ANEEL 505, de novembro de 2001, que estabelece limites de variação da tensão e penalidades em caso de não conformidade. A partir de 2007, quando os limites de variação e os prazos

para regularização atingem seus valores finais mínimos, a necessidade de manter a tensão de todos os consumidores dentro da faixa adequada torna-se uma obrigação, pois são tolerados desvios de apenas 3% das medidas com valores precários (entre 90 e 93% do valor nominal) e 0,5% de valores críticos (abaixo de 90% ou acima de 105% do valor nominal). Isto praticamente obriga as empresas a investirem fortemente na melhoria e na regulação da tensão dos alimentadores de distribuição, ou seja, limitar a variação da tensão que ocorre com a variação da carga ao longo do tempo.

Os bancos de capacitores em derivação são utilizados geralmente para corrigir o fator de potência, fazendo um controle da potência reativa injetada no sistema. Eles podem ser de dois tipos: 1) fixos, que apresentam menor custo e ficam constantemente ligados; e 2) chaveados, que são ligados de acordo com o nível de carregamento da rede, permitindo que a tensão seja regulada para manter-se dentro de determinados limites, mesmo com a variação da carga.

Embora diversos trabalhos tenham sido realizados na área de alocação de bancos de capacitores,

estes trabalhos abordam geralmente o problema de redução de perdas, com foco nos períodos de maior carregamento, quando as perdas são mais representativas. Em função das não-linearidades inerentes a este tipo de abordagem, modelos baseados em métodos heurísticos de otimização têm sido utilizados com frequência (Carlisle *et al*, 1997 e Ng *et al*, 2000).

Neste trabalho, o problema de alocação tem por objetivo eliminar as violações dos limites de tensão que são definidos pela Resolução 505 da ANEEL, por intermédio da instalação de unidades fixas e chaveadas, considerando a variação horária da carga. A formulação apresentada minimiza os custos de aquisição, instalação, remoção e manutenção das unidades por intermédio de um modelo linear de otimização que é resolvido por intermédio de um algoritmo *branch-and-bound*. No modelo apresentado, foram desenvolvidas soluções lineares para vários problemas: 1) o valor absoluto da violação dos limites de tensão é representado por intermédio da inclusão de uma variável auxiliar e restrições lineares; 2) os limites móveis de tensão, que dependem da derivação (tap) que o transformador está operando, são representados por uma tensão de referência que pode ser ajustada dentro dos limites físicos de cada transformador; e 3) a restrição não-linear que limita a magnitude da corrente nos condutores é representada de modo quase exato por restrições lineares de canalização.

No modelo de rede utilizado, detalhado em (Haffner *et al*, 2008), os fluxos nos ramos, as demandas e as injeções nodais são representados por duas parcelas: uma relacionada com a potência ativa, outra com a potência reativa. A magnitude da tensão nodal é determinada por intermédio da superposição dos efeitos destas duas parcelas, sendo as quedas de tensão nos ramos determinadas por uma relação linear. O modelo de otimização apresentado neste trabalho tem por objetivo minimizar os custos de aquisição, instalação e manutenção dos bancos de capacitores de modo que as violações nos limites de tensão sejam minimizadas, considerando os limites de capacidade dos condutores, os limites de investimento, a variação da carga, a possibilidade de ajustar o tap de operação dos transformadores e a melhor forma de operação das unidades chaveáveis.

O artigo está organizado de acordo com a seguinte seqüência. Na seção 2, é apresentada a notação empregada na formulação do problema. Na seção 3, apresentam-se as características fundamentais do modelo apresentado. Na seção 4, descreve-se a forma de representação do desvio de tensão. O modelo de otimização é descrito na seção 5. Para finalizar são apresentadas as conclusões.

## 2 Notação

$\Psi^N$  e  $N$  – conjunto e cardinalidade dos nós da rede;  
 $\Psi^R$  e  $R$  – conjunto e cardinalidade dos ramos da rede;

$\Psi^D$  e  $D$  – conjunto e cardinalidade dos nós com demanda, cuja tensão deve ser regulada;  
 $\Psi^G$  e  $G$  – conjunto e cardinalidade dos nós da rede onde existe capacidade de injeção de potência e a tensão pode ser controlada (subestação e barras de tensão controlada);  
 $\Psi^{BC}$  e  $BC$  – conjunto e cardinalidade dos nós candidatos a instalação de bancos de capacitores;  
 $\Psi^F$  e  $F$  – conjunto e cardinalidade dos tipos de bancos de capacitores fixos que podem ser instalados ou remanejados;  
 $\Psi^C$  e  $C$  – conjunto e cardinalidade dos tipos de bancos de capacitores chaveáveis que podem ser instalados ou remanejados;  
 $\Psi^{NC}$  e  $NC$  – conjunto e cardinalidade dos níveis de carregamento a serem considerados para representar a variação da carga;  
 $x_i^{FI}$  – variável de decisão binária que indica a instalação do banco de capacitor fixo do tipo  $FI$  na barra  $i$ ;  
 $x^F$  – vetor das variáveis de investimento relacionadas com os bancos de capacitor fixos;  
 $x_i^{CI}$  – variável de decisão binária que indica a instalação do banco de capacitor chaveável do tipo  $CI$  na barra  $i$ ;  
 $y_{i,j}^{CI}$  – variável de utilização binária que indica que a unidade chaveável do tipo  $CI$  na barra  $i$  está ligada no nível de carregamento  $j$ ;  
 $\mathbf{y}_j^C$  – vetor das variáveis de operação dos bancos de capacitores chaveáveis no nível de carregamento  $j$ ;  
 $V_{i,j}$  – magnitude da tensão na barra  $i$  no nível de carregamento  $j$ ;  
 $\mathbf{V}_j$  – vetor das tensões no nível de carregamento  $j$ ;  
 $f_{i,j}^{\text{Re}}$  e  $f_{i,j}^{\text{Im}}$  – partes real e imaginária da corrente no ramo  $i$  no nível de carregamento  $j$ ;  
 $\mathbf{f}_j^{\text{Re}}$  e  $\mathbf{f}_j^{\text{Im}}$  – vetor das partes real e imaginária das correntes nos ramos no nível de carregamento  $j$ ;  
 $f_i^{\text{max}}$  – corrente máxima admissível no ramo  $i$ ;  
 $g_{i,j}^{\text{Re}}$  e  $g_{i,j}^{\text{Im}}$  – partes real e imaginária da injeção de corrente da barra  $i$  no nível de carregamento  $j$ ;  
 $g_{\text{max},i,j}^{\text{Re}}$  – injeção máxima de corrente real da barra  $i$  no nível de carregamento  $j$ ;  
 $g_{\text{min},i,j}^{\text{Im}}$  e  $g_{\text{max},i,j}^{\text{Im}}$  – injeções mínima e máxima de corrente imaginária da barra  $i$  no nível de carregamento  $j$ ;  
 $\Delta V_{i,j}$  – violação dos limites de tensão na barra  $i$  no nível de carregamento  $j$ ;  
 $V^{\text{ref}}$  – tensão de referência para definição do tap de operação do transformador da barra  $i$ ;  
 $V_i^{\text{min}}$  e  $V_i^{\text{max}}$  – limites de tensão da barra  $i$ , considerando a possibilidade de alteração do tap de operação do transformador;  
 $d_{i,j}^{\text{Re}}$  e  $d_{i,j}^{\text{Im}}$  – partes real e imaginária da demanda de corrente da barra  $i$  no nível de carregamento  $j$ ;

$R_i$  e  $X_i$  – partes real e imaginária da impedância do ramo  $i$ ;  
 $K_{i,j}$  – fator de ajuste calculado para o ramo  $i$  no nível de carregamento  $j$ ;  
 $\mathbf{S}$  – matriz incidência nó-ramo da rede;  
 $\mathbf{Q}^F$  e  $\mathbf{Q}^C$  – matrizes das injeções de corrente relacionadas com os bancos de capacitores fixos e chaveáveis que são candidatos a instalação ou realocação;  
 $CA^{FI}$  e  $CM^{FI}$  – custos de aquisição e de manutenção do banco de capacitor fixo do tipo  $I$ ;  
 $CI_i^{FI}$  e  $CR_i^{FI}$  – custos de instalação e de remoção para a barra  $i$  do banco de capacitor fixo do tipo  $I$ ;  
 $CA^{CI}$  e  $CM^{CI}$  – custos de aquisição e de manutenção do banco de capacitor chaveável do tipo  $I$ ;  
 $CI_i^{CI}$  e  $CR_i^{CI}$  – custos de instalação e de remoção para a barra  $i$  do banco de capacitor chaveável do tipo  $I$ ;  
 $NB_{\max}^{FI}$  e  $NB_{\max}^F$  – número de bancos fixos do tipo  $I$  disponíveis e número máximo de bancos fixos que podem ser instalados;  
 $NB_{\max}^{CI}$  e  $NB_{\max}^C$  – número de bancos chaveáveis do tipo  $I$  disponíveis e número máximo de bancos chaveáveis que podem ser instalados;  
 $NB_{\max}$  – número máximo de bancos;  
 $B_{\max}$  – recurso disponível para aquisição de bancos de capacitores;  
 $CV_i$  – custo associado à violação da tensão na barra  $i$ ;  
 $\Delta T_j$  – duração em horas por ano do nível de carregamento  $j$ ;  
 $\delta$  – fator para converter custos anuais de operação no valor presente dos custos de operação;  
 $T$  – duração em anos do horizonte de planejamento;  
 $i_{\%}$  – taxa de juros anuais em percentual.

### 3 Características fundamentais

O modelo de otimização descrito a seguir tem por objetivo definir os locais e os tipos de bancos de capacitores fixos e chaveáveis que devem ser instalados de modo que o custo de aquisição, instalação e manutenção e as violações nos limites de tensão sejam minimizados. O problema de alocação e realocação de bancos de capacitores em alimentadores de distribuição leva em conta os seguintes fatores:

- a rede de distribuição é dividida em nós, nos quais as cargas e fontes são concentradas, e ramos que realizam a conexão entre os nós, representando o percurso dos alimentadores;
- a variação horária da demanda é representada por  $NC$  níveis de carregamento, sendo as variáveis relacionadas com a operação da rede (demanda, tensão e fluxo) associadas a cada um destes níveis de carregamento;
- aos nós são associadas três variáveis para cada nível de carregamento (magnitude da tensão nodal; partes real e imaginária da demanda de corrente); aos ramos são associadas duas variáveis para cada nível de carregamento: partes real e imaginária da corrente;

- a instalação, remoção ou realocação dos bancos de capacitores constituem o conjunto das alternativas de investimento que serão empregadas para solução do problema de expansão;
- a instalação de uma nova unidade ou a utilização de um banco pré-existente está associada a uma variável binária que assume o valor unitário quando a alternativa for selecionada (instalação de uma unidade ou a permanência de um banco no local em que estava previamente instalado) e o valor zero quando a alternativa não for selecionada (não instalação do banco ou remoção de um banco pré-existente);
- para as unidades fixas e chaveáveis estão associados custos de aquisição, de instalação, de manutenção e, para as unidades pré-existentes, custos de remoção, instalação e manutenção;
- a utilização dos bancos chaveáveis em cada nível de carregamento está associada a variáveis binárias, que assumem valor unitário quando o banco estiver ligado e o valor zero quando o banco estiver desligado;
- os bancos de capacitores fixos são considerados em operação em todos os níveis de carregamento; os bancos chaveáveis entram em operação apenas quando são necessários;
- a carga é representada por demandas constantes de corrente, com valores conhecidos para cada nível de carregamento;
- as tensões nodais e os fluxos nos ramos são determinados através das duas Leis de Kirchhoff;
- os limites de capacidade dos condutores e as capacidades das subestações;
- as quedas de tensão na rede de distribuição são calculadas a partir de um modelo simplificado levando em conta a impedância dos ramos e a corrente em cada nível de carregamento;
- as violações nas tensões são avaliadas em todas as barras onde existe demanda ou injeção, para todos os níveis de carregamento considerados;
- a função objetivo corresponde a minimização do valor presente dos custos de investimento (considerados apenas uma vez e relacionados com a aquisição, instalação e remoção dos bancos de capacitores) e de operação (considerados ao longo do horizonte de planejamento e relacionados com a manutenção dos bancos de capacitores e com as multas advindas da violação dos limites de tensão);
- são considerados limites para os custos de investimento e manutenção.

### 4 Representação do desvio de tensão

O desvio da tensão nodal com relação aos seus limites mínimo e máximo é definido  $\forall i \in \Psi^D$  e  $\forall j \in \Psi^{NC}$  como:

$$\Delta V_{i,j} = \begin{cases} V_{i,j} - V_i^{\max}, & \text{se } V_{i,j} > V_i^{\max} \\ V_i^{\min} - V_{i,j}, & \text{se } V_{i,j} < V_i^{\min} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

Neste trabalho, a expressão linear por partes (1) é substituída pela seguinte forma equivalente, que evita a inclusão de variáveis adicionais:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Delta V_{i,j} \\ \text{s.a.} \quad & \Delta V_{i,j} \geq V_{i,j} - V_i^{\max} \\ & \Delta V_{i,j} \geq V_i^{\min} - V_{i,j} \\ & \Delta V_{i,j} \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Os valores mínimos e máximos utilizados nas expressões (1) e (2) podem ser obtidos a partir da Resolução N-505/2001 da ANEEL que apresenta uma classificação para a tensão de atendimento, definido como “adequada” quando entre 93% e 105% da Tensão Nominal (para os consumidores em baixa tensão) ou da Tensão Contratada (para os consumidores em alta tensão). Assim, para fazer com que as tensões se mantenham dentro da faixa “adequada” os limites mínimo e máximo em pu são 0,93 e 1,05, respectivamente.

Por outro lado, como os transformadores de distribuição possuem derivações (taps) em seu lado de média tensão e busca-se regular a tensão fornecida aos consumidores na baixa tensão, os limites mínimo e máximo da tensão no circuito de média tensão são móveis, pois dependem do tap que o transformador está operando. Levando em conta as relações de tensão usuais dos transformadores de distribuição, observa-se que além da tensão nominal existem duas outras derivações no lado de média tensão, com valores próximos a 0,95 e 0,90 pu. Levando em consideração a possibilidade de utilização destas derivações, os valores mínimos e máximos para o lado de média tensão visando obter uma tensão adequada no lado de baixa tensão são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1. Limites para tensão adequada considerando as derivações (valores em pu).

Derivação (tap)	Relação de transformação	Média tensão		Baixa tensão	
		$V_i^{\min}$	$V_i^{\max}$	$V_i^{\min}$	$V_i^{\max}$
1	1:1	0,93	1,05	0,93	1,05
2	1:1,0525	0,8835	0,9975	0,93	1,05
3	1:1,1111	0,8370	0,9450	0,93	1,05

Caso o tap de operação não seja definido a priori, é possível incorporar ao modelo a definição do melhor tap de modo que a tensão no enrolamento de baixa tensão seja considerada adequada, segundo a Resolução N-505/2001 da ANEEL. Observa-se que independente do tap empregado, a relação entre o limite superior e o inferior é sempre de aproximadamente 1,1290. Considerando esta proporção, que define a máxima variação, e os limites extremos mostrados na Tabela 1, os limites fixos  $V_i^{\min}$  e  $V_i^{\max}$  podem ser substituídos por limites móveis conforme

ilustrado na Figura 1, definidos a partir de uma tensão de referência  $V_i^{\text{ref}}$ :

$$\begin{aligned} V_i^{\text{ref}} & \geq V_i^{\min} = 0,8370 \\ 1,1290V_i^{\text{ref}} & \leq V_i^{\max} = 1,05 \end{aligned} \quad (3)$$

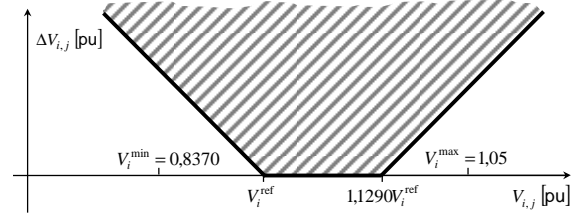


Figura 1. Limites móveis considerando a possibilidade de selecionar a derivação.

Para considerar a possibilidade de selecionar a derivação a ser utilizada segundo a Tabela 1, é introduzida uma tensão de referência  $V_i^{\text{ref}}$  (que representa a menor tensão admitida) e o limite superior é substituído por  $1,1290V_i^{\text{ref}}$ , chegando-se à:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Delta V_{i,j} \\ \text{s.a.} \quad & \Delta V_{i,j} \geq V_{i,j} - 1,1290V_i^{\text{ref}} \\ & \Delta V_{i,j} \geq V_i^{\text{ref}} - V_{i,j} \\ & \Delta V_{i,j} \geq 0 \\ & V_i^{\text{ref}} \geq V_i^{\min} = 0,8370 \\ & V_i^{\text{ref}} \leq 0,8857V_i^{\max} = 0,93 \end{aligned} \quad (4)$$

O valor obtido para  $V_i^{\text{ref}}$  na solução do modelo de otimização indicará qual a derivação mais adequada para cada transformador, sendo selecionada aquela em que o valor mínimo  $V_i^{\min}$  da média tensão estiver mais próximo. Para transformadores com mais derivações ou valores diferentes dos mostrados na Tabela 1 as constantes utilizadas na expressão (4) serão ligeiramente diferentes, sendo determinadas de forma análoga. Caso seja necessário manter os valores obtidos restritos apenas às três faixas mostradas na Tabela 1, basta fazer com que a tensão de referência da equação (4) seja substituída por:

$$V_i^{\text{ref}} = 0,93[1 - 0,05(a_i - 1)] \quad (5)$$

sendo  $a_i$  um número inteiro positivo,  $1 \leq a_i \leq 3$ , que representa a derivação utilizada no enrolamento de média tensão, segundo a Tabela 1. Utilizando-se a expressão (5) a derivação mais adequada segundo valores mostrados na Tabela 1 será determinada diretamente pelo valor da variável  $a_i$  na solução do modelo de otimização.

## 5 Modelo de otimização

### 5.1 Função objetivo

A função objetivo do problema de expansão possui duas partes: custo de investimento ( $C^{\text{inv}}$ ) e custo de operação ( $C^{\text{oper}} = C^{\text{man}} + \sum_{i=1}^{NC} C_i^{\text{vio}}$ ), conforme apresentado na Figura 2 que ilustra o caso de serem considerados três níveis de carregamento. O custo de investimento é efetivado uma única vez, no início do

horizonte de planejamento considerado, e corresponde aos custos associados à aquisição, instalação e remoção dos bancos de capacitores. O custo de operação é considerado no início de cada ano do horizonte de planejamento e corresponde ao custo anual de manutenção dos bancos de capacitores mais uma parcela relacionada com as violações nos limites de tensão que são ponderadas pela duração de cada nível de carregamento.

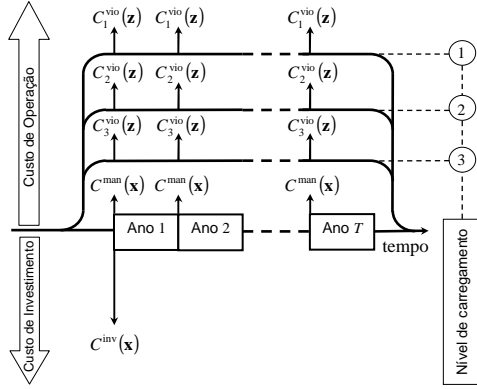


Figura 2. Instantes de efetivação dos custos de operação (para três níveis de carregamento) e de investimento.

Para um horizonte de planejamento de  $T$  anos, a função objetivo corresponde à minimização do valor presente do custo de investimento mais os custos de operação que são distribuídos ao longo do tempo, sendo dada pela seguinte expressão:

$$C = C^{\text{inv}} + \delta \left( C^{\text{man}} + \sum_{j \in \Psi^{\text{NC}}} C_j^{\text{vio}} \right) \quad (6)$$

$$C^{\text{inv}} = \sum_{i \in \Psi^{\text{BC}}} \left\{ \sum_{l \in \Psi^{\text{F}}} [CR_l^{\text{Fl}} + (CA^{\text{Fl}} + CI_l^{\text{Fl}} - CR_l^{\text{Fl}})x_l^{\text{Fl}}] + \sum_{l \in \Psi^{\text{C}}} [CR_l^{\text{Cl}} + (CA^{\text{Cl}} + CI_l^{\text{Cl}} - CR_l^{\text{Cl}})x_l^{\text{Cl}}] \right\} \quad (7)$$

$$C^{\text{man}} = \sum_{i \in \Psi^{\text{BC}}} \left[ \sum_{l \in \Psi^{\text{F}}} CM^{\text{Fl}} x_l^{\text{Fl}} + \sum_{l \in \Psi^{\text{C}}} CM^{\text{Cl}} x_l^{\text{Cl}} \right] \quad (8)$$

$$C_j^{\text{vio}} = \Delta T_j \sum_{i \in \Psi^{\text{D}}} CV_i \Delta V_{i,j} \quad (9)$$

$$\delta = \sum_{t=1}^T \frac{1}{\left(1 + \frac{i_{\%}}{100}\right)^{t-1}} \quad (10)$$

## 5.2. Restrições

As restrições do problema estão divididas em quatro blocos e são oriundas da aplicação das Leis de Kirchhoff, da imposição dos limites operacionais dos equipamentos para todos os níveis de carregamento e dos recursos disponíveis (limitação financeiras e de equipamentos). O primeiro bloco de restrições é obtido com a imposição da Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) para todos os níveis de carregamento ( $\forall j \in \Psi^{\text{NC}}$ ), sendo composta por dois conjuntos de equações (relacionados com as potências ativa e reativa, respectivamente):

$$\mathbf{Sf}_j^{\text{Re}} + \mathbf{g}_j^{\text{Re}} = \mathbf{d}_j^{\text{Re}} \quad (11)$$

$$\mathbf{Qx}_j^{\text{F}} + \mathbf{Qy}_j^{\text{C}} + \mathbf{Sf}_j^{\text{Im}} + \mathbf{g}_j^{\text{Im}} = \mathbf{d}_j^{\text{Im}} \quad (12)$$

É importante observar que a equação (12), relacionada com o balanço de potência reativa, inclui a contribuição dos bancos de capacitores fixos a serem instalados e os bancos de capacitores chaveados em operação nos respectivos níveis de carregamento.

O segundo bloco de restrições advém da aplicação da Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT), para todos os ramos  $i \in \Psi^{\text{R}}$  e para todos os níveis de carregamento  $j \in \Psi^{\text{NC}}$ :

$$K_{i,j} R_i f_{i,j}^{\text{Re}} - X_i f_{i,j}^{\text{Im}} + [\mathbf{S}^{\text{T}}]_{\text{linha } i} \mathbf{V}_j = 0 \quad (13)$$

onde o sobrescrito T indica matriz transposta. Detalhes de como o fator de ajuste  $K_{i,j}$  é determinado e do modelo de rede empregado, baseado em injeções de corrente, podem ser obtidos em (Haffner *et al*, 2008).

O terceiro bloco de restrições inclui os limites operacionais dos equipamentos e os limites de investimento. Os limites de fluxo nos ramos, relacionados com a magnitude da corrente (cujas partes real e imaginária são dadas por  $f_{i,j}^{\text{Re}}$  e  $f_{i,j}^{\text{Im}}$ ), são aproximados por restrições lineares que constituem as arestas do dodecágono inscrito na circunferência cujo raio é a capacidade máxima  $f_i^{\text{max}}$ , conforme mostrado na Figura 3.

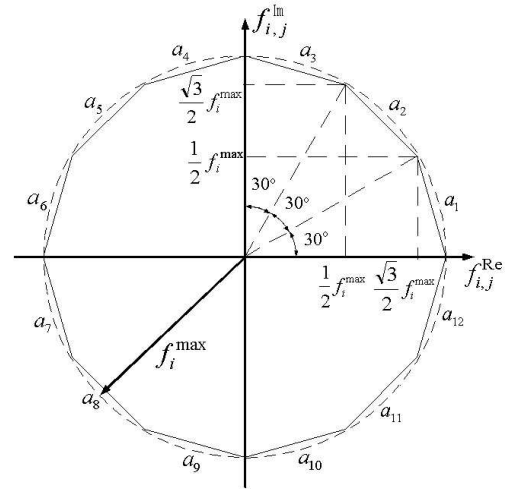


Figura 3. Restrições lineares utilizadas para aproximar o limite de fluxo nas linhas.

Assim, as seis restrições utilizadas para representar o limite de um ramo qualquer  $i \in \Psi^{\text{R}}$  para o nível de carregamento  $j \in \Psi^{\text{NC}}$  são:

$$-f_i^{\text{max}} \leq f_{i,j}^{\text{Re}} + (2 - \sqrt{3})f_{i,j}^{\text{Im}} \leq f_i^{\text{max}} \quad (14)$$

$$-f_i^{\text{max}} \leq (\sqrt{3} - 1)f_{i,j}^{\text{Re}} + (\sqrt{3} - 1)f_{i,j}^{\text{Im}} \leq f_i^{\text{max}} \quad (15)$$

$$-f_i^{\text{max}} \leq (2 - \sqrt{3})f_{i,j}^{\text{Re}} + f_{i,j}^{\text{Im}} \leq f_i^{\text{max}} \quad (16)$$

$$-f_i^{\text{max}} \leq (\sqrt{3} - 2)f_{i,j}^{\text{Re}} + f_{i,j}^{\text{Im}} \leq f_i^{\text{max}} \quad (17)$$

$$-f_i^{\text{max}} \leq (1 - \sqrt{3})f_{i,j}^{\text{Re}} + (\sqrt{3} - 1)f_{i,j}^{\text{Im}} \leq f_i^{\text{max}} \quad (18)$$

$$-f_i^{\text{max}} \leq -f_{i,j}^{\text{Re}} + (2 - \sqrt{3})f_{i,j}^{\text{Im}} \leq f_i^{\text{max}} \quad (19)$$

Na Figura 3, as arestas  $a_1$  e  $a_7$  são definidas pela restrição (14); as arestas  $a_2$  e  $a_8$  são definidas pela

restrição (15); e assim sucessivamente. Em conjunto, as restrições (14) a (19) definem como viável a superfície do dodecágono, que define a capacidade do ramo. Desta forma, o uso de restrições não-lineares é evitado.

Para representação dos limites de tensão, são utilizadas as equações (4). Observar que a minimização dos desvios de tensão já foi incorporada à função objetivo na equação (9).

Para as barras com capacidade de geração (subestações ou geração distribuída)  $i \in \Psi^G$ , os limites de injeção e de tensão de operação para todos os níveis de carregamento  $j \in \Psi^{NC}$ , são dados por:

$$0 \leq g_{i,j}^{\text{Re}} \leq g_{\max,i,j}^{\text{Re}} \quad (20)$$

$$g_{\min,i,j}^{\text{Im}} \leq g_{i,j}^{\text{Re}} \leq g_{\max,i,j}^{\text{Im}} \quad (21)$$

$$V_{i,j}^{\min} \leq V_{i,j} \leq V_{i,j}^{\max} \quad (22)$$

Diversos limites podem ser definidos para os investimentos em aquisição de cada tipo de banco, para os custos de instalação e manutenção, ou para os custos totais. Por exemplo, a restrição que limita os custos totais de aquisição é dada por:

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} \left( \sum_{I \in \Psi^F} CA^{FI} x_i^{FI} + \sum_{I \in \Psi^C} CA^{CI} x_i^{CI} \right) \leq B_{\max} \quad (23)$$

O quarto bloco consiste nas restrições lógicas do problema, sendo formado pelas seguintes restrições:

- só é permitida a instalação de um banco de capacitor por barra candidata

$$\sum_{I \in \Psi^F} x_i^{FI} + \sum_{I \in \Psi^C} x_i^{CI} \leq 1, \quad \forall i \in \Psi^{BC} \quad (24)$$

- cada tipo de banco possui uma quantidade máxima disponível (por exemplo, bancos candidatos a realocação estão limitados às quantidades pré-existentis):

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} x_i^{FI} \leq NB_{\max}^{FI}, \quad \forall I \in \Psi^F \quad (25)$$

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} x_i^{CI} \leq NB_{\max}^{CI}, \quad \forall I \in \Psi^C \quad (26)$$

- quantidade máxima de bancos fixos, chaveados e total:

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} \sum_{I \in \Psi^F} x_i^{FI} \leq NB_{\max}^F, \quad \forall I \in \Psi^F \quad (27)$$

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} \sum_{I \in \Psi^C} x_i^{CI} \leq NB_{\max}^C, \quad \forall I \in \Psi^C \quad (28)$$

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} \left( \sum_{I \in \Psi^F} x_i^{FI} + \sum_{I \in \Psi^C} x_i^{CI} \right) \leq NB_{\max} \quad (29)$$

Apesar de sua grande simplicidade, as restrições (23) a (29) desempenham um importante papel na redução do espaço de busca, tornando o problema de otimização tratável até mesmo por meio de métodos de otimização exata, tais como o algoritmo *branch-and-bound*. Deve-se observar que a imposição de restrições financeiras ou limitações no número de unidades a serem instaladas pode implicar a obtenção de soluções que apresentem violações nos limites de tensão, mas estas serão mínimas. Ainda, é possível ponderar pela carga demandada os termos na função

objetivo relacionados com as violações de tensão, para quantificar as “compensações ao serviço inadequado” (ANEEL, 2001) a que as concessionárias estarão sujeitas. Assim, os desvios associados aos locais mais críticos serão evitados com maior veemência. Esta abordagem é bastante superior a lidar com restrições nas tensões, pois estas podem tornar o problema infactível.

## 6 Conclusão

Foi apresentado um modelo de otimização linear inteiro misto para alocação e re-alocação de bancos de capacitores fixos e chaveados em redes de distribuição de energia elétrica, considerando a variação diária da carga. O modelo permite minimizar os custos de investimento e operação do sistema além de minimizar os custos relacionados como o não atendimento dos limites de tensão.

Na formulação descrita foram introduzidas duas alternativas para a tradicional abordagem não-linear: 1) os valores absolutos das violações foram tratados pela inclusão de uma variável auxiliar e restrições lineares; 2) a restrição que limita a magnitude da corrente nos condutores é representada de modo quase exato por restrições lineares de canalização.

Além disto, o modelo inclui a representação de limites móveis de tensão, que dependem da derivação que o transformador está operando. Isto permite definir de forma integrada o melhor tap de operação dos transformadores de distribuição em conjuntos com os bancos de capacitores fixos e chaveáveis, implicando a obtenção de melhores resultados.

## Agradecimentos

O desenvolvimento deste trabalho foi parcialmente apoiado pela Companhia Estadual de Energia Elétrica (CEEE), através de seus programas P&D ANEEL.

## Referências Bibliográficas

- Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL). *Resolução no 505, 26 de novembro de 2001*.
- Carlisle, J. C., El-Keib, A. A., Boyd, D., Nolan, K. (1997). A review of capacitor placement techniques on distribution feeders, *Proceedings of the Twenty-Ninth Symposium on System Theory*, pp.359–365.
- Haffner, S., Pereira, L. A. e Gasperin, L. (2008). Modelo aproximado para representação de redes de distribuição de energia elétrica. *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática*, pp.1–8.
- Ng, H. N., Salama, M. M., Chikhani, A. Y. (2000). Classification of Capacitor Allocation Techniques, *IEEE Transactions on Power Delivery*, **15**(1): 387–392.